فصل دوم : مثلثات

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

۱- دوره تناوب تابع $y = \sin ۵x$ برابر $T = \frac{\pi}{۵}$ است. (.....)

۲- بیشترین مقدار تابع $y = -۲\cos(۲\pi x)$ برابر با یک است. (.....)

۳- دامنه تابع $y = \frac{۱}{۲}\tan x$ برابر R است. (.....)

۴- جواب های معادله $\cos x = ۱$ و $\sin x = ۰$ با هم برابر هستند. (.....)

۵- دوره تناوب $y = \tan(x)$ برابر ۲π است. (.....)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

۱- بیشترین مقدار تابع $y = ۲ - \frac{۱}{۲}\ sin\ (۲x - ۱)$ برابر با ..... است.

۲- دوره تناوب $y = -۱ + ۳\ cos(\frac{\pi}{۲} - ۳x)$ برابر با ..... است.

۳- اگر a جوابی برای معادله $cos\ x = a$ باشد ، آن گاه جواب های کلی این معادله ..... و ..... می باشند.

۴- اگر a جوابی برای معادله $sin\ x = a$ باشد ، آن گاه جواب های کلی این معادله ..... و ..... می باشند.

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

۱- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

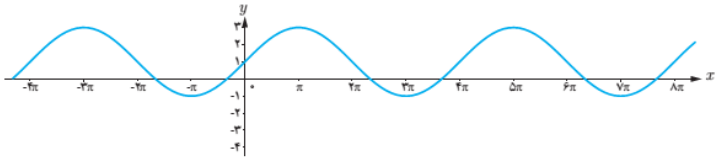
پ) $y = \frac{۱}{۲}\sin\left(-\frac{۳x}{۲}\right) + ۱$

ت) $y = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$

ث) $y = -\sin(x) + ۴$

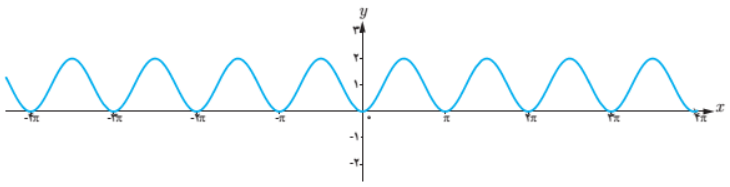
ج) $y = ۳\sin\left(۲x - \frac{\pi}{۴}\right) + ۲$

۲- با توجه به شکل های زیر ، ضابطه تابعی به شکل $y = a\cos(bx) + c$ ، $y = a\sin(bx) + c$ بنویسید.



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب)



۳- ضابطه تابعی به شکل $y = a\cos(bx) + c$ ، $y = a\sin(bx) + c$ بنویسید که دوره تناوب و می نیمم و ماکزیمم آن برابر مقادیر زیر باشد:

الف) $T = \frac{\pi}{۲}$ ، $min = -۲$ ، $max = ۴$ ب) $T = ۶$ ، $min = ۱$ ، $max = ۷$

پ) $T = \frac{\pi}{۲}$ ، $min = -۱$ ، $max = ۱$ ت) $T = \frac{۳}{۲}$ ، $min = -۸$ ، $max = -۲$

۴- مقدار $\cos ۱۵°$ ، $\sin ۱۵°$ را بیابید.

۵- نسبت های مثلثاتی زاویه $۲۲/۵°$ را بدست آورید.

۶- اگر $sinx = \frac{۴}{۵}$ ، $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $\sin(۲x) =$

ب) $\cos(۲x) =$

پ) $\tan(۲x) =$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۱- معادله های زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن ها را بنویسید

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $2\sin(3x) - \sqrt{2} = 0$

پ) $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ت) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

ث) $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$

ج) $\cos x\,(2\cos x - 9) = 5$

چ) $\cos(2x) - \cos x + 1 = 0$

ح) $\cos(2x) - \sin x + 1 = 1$

خ) $\cos x = \cos(2x)$

د) $\cos(3x) + \cos x = 0$

۲- معادله های زیر را حل کنید و جواب های متعلق به بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

الف) $\cos(2x) + 4\sin^2 x = 2$

ب) $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پاسخنامه

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

۱- (غ)

۲- (غ)

۳- (غ)

۴- (غ)

۵- (غ)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

۱- $\frac{۱۵}{۲}$

۲- $\frac{۲\pi}{۳}$

۳- $x = ۲k\pi \pm \alpha$

۴- $x = (۲k+۱)\pi - \alpha \;\; , \;\; x = ۲k\pi + \alpha$

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

۱- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲ \rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \;\; , \;\; max = |a| + c = ۳ - ۲ = ۱ \;\; ,$

$min = -|a| + c = -۳ - ۲ = -۵$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x) \rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲ \;\; , \;\; max = \frac{۱}{۴} \;\; , \;\; min = -\frac{۱}{۴}$

پ) $y = \frac{۱}{۲}\sin\left(-\frac{۳x}{۲}\right) + ۱ \rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴\pi}{۳} \;\; , \;\; max = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲} \;\; ,$

$min = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲}$

ت) $y = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right) \rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴ \;\; , \;\; max = ۱ \;\; , min = -۱$

ث) $y = -\sin(x) + ۴ \rightarrow T = ۲\pi \;\; , \;\; max = ۱ + ۴ = ۵ \;\; , min = -۱ + ۴ = ۳$

ج) $y = ۳\sin\left(۲x - \frac{\pi}{۴}\right) + ۲ \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \;\; , max = ۳ + ۲ = ۵ \;\; , min = -۳ + ۲$

$= -۱$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲- با توجه به شکل های زیر ، ضابطه تابعی به شکل $y = a\cos(bx) + c$ ، $y = a\sin(bx) + c$ بنویسید.

الف) $T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$ ، $max = |a| + c = ۳$ ، $min = -|a| + c = -۱$

$\rightarrow c = ۱ , a = ۲ \quad \rightarrow \quad y = ۲sin\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱$

ب) $T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = ۲$ ، $max = |a| + c = ۲$ ، $min = -|a| + c = ۰$

$\rightarrow a = ۱ , c = ۱ \quad \rightarrow \quad y = -\cos(۲x) + ۱$

۳- ضابطه تابعی به شکل $y = a\cos(bx) + c$ ، $y = a\sin(bx) + c$ بنویسید که دوره تناوب و می نیمم و ماکزیمم آن برابر مقادیر زیر باشد:

الف) $T = \frac{\pi}{۲}$ ، $min = -۲$ ، $max = ۴$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \rightarrow |b| = ۴$ ، $max = |a| + c = ۴$ ، $min = -|a| + c = -۲$

$\rightarrow a = ۳ , c = ۱ \quad \rightarrow \quad y = ۳\sin(۴x) + ۱$ یا $y = ۳\cos(۴x) + ۱$

ب) $T = ۶$ ، $min = ۱$ ، $max = ۷$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۶ \rightarrow |b| = \frac{\pi}{۳}$ ، $max = |a| + c = ۷$ ، $min = -|a| + c = ۱$

$\rightarrow a = ۳ , c = ۴ \quad \rightarrow \quad y = ۳\sin\left(\frac{\pi}{۳}x\right) + ۴$ یا $y = ۳\cos\left(\frac{\pi}{۳}x\right) + ۴$

پ) $T = \frac{\pi}{۲}$ ، $min = -۱$ ، $max = ۱$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \rightarrow |b| = ۴$ ، $max = |a| + c = ۱$ ، $min = -|a| + c = -۱$

$\rightarrow a = ۱ , c = ۰ \quad \rightarrow \quad y = \sin(۴x)$ یا $y = \cos(۴x)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ت) $T=\frac{۳}{۲}$ $,min=-۸$ $,max=-۲$

$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۳}{۲}\rightarrow |b|=\frac{۴\pi}{۳}$ „ $max=|a|+c=-۲$ $,min=-|a|+c=-۸$

$\rightarrow$ $a=۳$ $,c=-۵$ $\rightarrow$ $y=۳\sin\left(\frac{۴\pi}{۳}x\right)-۵$ یا $y=۳\cos\left(\frac{۴\pi}{۳}x\right)-۵$

۴- مقدار $cos۱۵°$, $\sin ۱۵°$ را بیابید.

$$sin^{۲}(۱۵°)=\frac{۱-\cos(۳۰)}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}\rightarrow \sin(۱۵°)=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

$$cos^{۲}(۱۵°)=\frac{۱+\cos(۳۰)}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}\rightarrow \cos(۱۵°)=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

۵- نسبت های مثلثاتی زاویه $۲۲/۵°$ را بدست آورید.

$$sin^{۲}(۲۲/۵°)=\frac{۱-\cos(۴۵)}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}\rightarrow \sin(۲۲/۵°)=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$cos^{۲}(۲۲/۵°)=\frac{۱+\cos(۴۵)}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}\rightarrow \cos(۲۲/۵°)=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$\tan(۲۲/۵°)=\frac{\sin(۲۲/۵°)}{\cos(۲۲/۵°)}=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}$$

$$\cot(۲۲/۵°)=\frac{\cos(۲۲/۵°)}{\sin(۲۲/۵°)}=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}$$

مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir

۶- اگر $sinx = \frac{۴}{۵}$, $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، مقادیر زیر را بدست آورید.

$$cos^{۲}(x) = ۱ - sin^{۲}(x) = ۱ - \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲} = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \rightarrow \cos(x) = +\frac{۳}{۵}$$

الف) $\sin(۲x) = ۲\, sinx \cos x = ۲ \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$

ب) $\cos(۲x) = cos^{۲}(x) - sin^{۲}(x) = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} - \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵} - \frac{۱۶}{۲۵} = -\frac{۷}{۲۵}$

پ) $\tan(۲x) = \frac{\sin(۲x)}{\cos(۲x)} = \frac{\frac{۲۴}{۲۵}}{-\frac{۷}{۲۵}} = -\frac{۲۴}{۷}$

۶- معادله های زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن ها را بنویسید.

الف) $۲\, sinx - \sqrt{۳} = ۰$

$$\rightarrow \quad sinx = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad \rightarrow \quad x_{۱} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \,, k \in Z$$

$$, x_{۲} = (۲k + ۱)\pi - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

ب) $۲\sin(۳x) - \sqrt{۲} = ۰$

$$\rightarrow \sin(۳x) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \quad ۱)\ ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow \quad x_{۱} = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \quad , \quad k \in Z$$

$$۲)\ ۳x = (۲k + ۱)\pi - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \rightarrow x_{۲} = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \quad , \ k \in Z$$

پ) $۲ \times \sin(x)\cos(x) = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \rightarrow \sin(۲x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow$

$$۱)\ ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad \rightarrow \quad x_{۱} = k\pi + \frac{\sqrt{۳}}{۴} \,, k \in Z$$

$$۲)\ ۲x = (۲k + ۱)\pi - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow \ x_{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir

ت) $\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \sin x$

$x_۱ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , \quad k \in Z$

$x_۲ = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$

ث) $۲\sin^۲x - \sin x - ۳ = ۰ \rightarrow ۲A^۲ - A - ۳ = ۰$

$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۲۵ \rightarrow A = \frac{۱ \pm ۵}{۴} \rightarrow$

$A_۱ = sinx = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست

$A_۲ = sinx = -\frac{۴}{۴} = -۱$ قابل قبول است

$x_۱ = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \quad , \quad k \in Z$

$x_۲ = (۲k+۱)\pi - \frac{۳\pi}{۲} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$

ج) $\cos x\,(۲\cos x - ۹) = ۵$

$۲\cos^۲(x) - ۹\cos x - ۵ = ۰ \rightarrow ۲A^۲ - ۹A - ۵ = ۰$

$\Delta = (-۹)^۲ - ۴(۲)(-۵) = ۱۲۱ \rightarrow A = \frac{۹ \pm ۱۱}{۴} \rightarrow$

$A_۱ = cosx = \frac{۲۰}{۴} = ۵$ قابل قبول نیست

$A_۲ = cosx = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است

$x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad k \in Z$

چ) $\cos(۲x) - cosx + ۱ = ۰$

$۲cos^۲(x) - ۱ - cosx + ۱ = ۰ \rightarrow ۲cos^۲(x) - cosx = ۰ \rightarrow cosx(۲cosx - ۱) = ۰$

$۱) cosx = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$

$۲) ۲cosx - ۱ = ۰ \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad , k \in Z$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ج) $\cos(2x) - \sin x + 1 = 1$

$$1 - 2\sin^2(x) - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - 2\sin^2(x) - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2(x) + \sin x - 1 = 0$$

$$\rightarrow 2A^2 + A - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \rightarrow A = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} A_1 = \sin x = \frac{-4}{4} = -1 \text{ قبول قابل است} \rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ A_2 = \sin x = +\frac{2}{4} = +\frac{1}{2} \text{ قبول قابل است} \rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x_2 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}, k \in Z$$

د) $\cos x = \cos(2x)$

$$2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \quad , k \in Z$$

$$2x = 2k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} , k \in Z \end{cases}$$

د) $\cos(3x) + \cos x = 0$

$$\cos(3x) = -\cos x \rightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x) \rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = (2k+1)\pi \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad , k \in Z \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad , k \in Z \end{cases}$$

۷- معادله های زیر را حل کنید و جواب های متعلق به بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

الف) $\cos(2x) + 4\sin^2 x = 2$

$$1 - 2\sin^2(x) + 4\sin^2 x = 2 \rightarrow 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

ب) $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$$\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z \\ 2\sin x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir